Primer Parcial
27 de Octubre de 2014

ÁLGEBRA LINEAL

Tiempo 2h.

APELLIDOS:
NOMBRE:

1. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-5\\-1\\5\end{pmatrix}\right\}, \qquad T = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \\ 3x+y+3z+t=0 \end{array}\right\}.$$

Se pide:

a) (**0.5 puntos**) Obtener unas ecuaciones implícitas del subespacio S.

b) (**0.5 puntos**) Calcular una base del subespacio T.

c) (**0.5 puntos**) Obtener una base del subespacio $S \cap T$.

d) (**0.5 puntos**) Obtener una base del subespacio $S + T$.

e) (**0.5 puntos**) Obtener las dimensiones de S, T, $S \cap T$ y $S+T$, y estudiar si la suma de los subespacios S y T es directa.

Solución

a) $$S = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x+z=0 \\ y+t=0 \end{array}\right\}$$

b) $$\mathcal{B}_T = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

c) $$\mathcal{B}_{S\cap T} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

d) $$\mathcal{B}_{S+T} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

e) $S = T = S\cap T = S+T$, por tanto $\dim(S) = \dim(T) = \dim(S\cap T) = \dim(S+T) = 2$ y la suma no es directa.

2. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la base $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\-6\end{pmatrix}\right\}$.

Se pide:

a) (**1 punto**) Calcular la matriz de cambio de base, de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a la base $\mathcal{B}$.

b) (**1 punto**) Calcular las coordenadas del vector $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\9\\-6\end{pmatrix}$ con respecto a la base $\mathcal{B}$.

Solución

a) $$\mathcal{C}(\mathcal{B}^3_C, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-10}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

b) $$\vec{v}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}-28\\5\\4\end{pmatrix}$$

CONTINÚA AL DORSO

⟶⟶

⟶⟶

⟶⟶

3. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz en las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

a) (**1 punto**) Hallar una base del núcleo y otra base de la imagen de f.

b) (**0.5 puntos**) Justificar si f es monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo.

c) (**0.5 puntos**) Comprobar que se verifica la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales.

d) (**1 punto**) Calcular la matriz $A' = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}_C^3)$ de la aplicación respecto de las bases $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{B}_C^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Solución

a) $\mathcal{B}_{Ker(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{B}_{Im(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

b) f es epimorfismo; f no es monomorfismo ni isomorfismo.

c) $\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = 4$.

d) $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (**2 puntos**) Hallar una matriz diagonal D y una matriz regular P tales que $D = P^{-1}AP$.

b) (**0.5 puntos**) Calcular A^{11}.

Solución

a) $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A^{11} = \begin{pmatrix} 4^{11} & 0 & 2(4^{11} - 5^{11}) \\ 2(5^{11} - 4^{11}) & 5^{11} & 4(5^{11} - 4^{11}) \\ 0 & 0 & 5^{11} \end{pmatrix}$.